1 Distribuições Contínuas de Probabilidade

São distribuições de variáveis aleatórias contínuas. Uma variável aleatória contínua toma um numero infinito não numerável de valores (intervalos de números reais), os quais podem ser associados com medidas numa escala contínua. Exemplos:

1. Mede-se a altura de uma mulher em uma cidade. O valor encontrado é um número real. Aqui também sabemos que esse número não passa de 3 metros, mas é conveniente considerar qualquer numero real positivo.

2. Em um exame físico para selecionar um jogador de futebol é medido o peso de cada candidato; aqui também consideramos que o resultado pode ser qualquer número real positivo.

3. Em campanhas preventivas de hipertensão arterial é comum de tempos em tempos medir-se o nível de colesterol. O valor de cada medida pode ser um número real não negativo.

4. Para pacientes que se apresentam num hospital a primeira atitude é medir-se a temperatura; o valor da temperatura é um número real que se pode considerar compreendido entre 35^{o} e 42^{o}C.

5. Retira-se uma lâmpada da linha de produção e coloca-se a mesma em um soquete acendendo-a; observa-se a mesma até que se queime. O tempo de duração da lâmpada é um numero real não negativo.

As variáveis continuas ficam completamente definidas por qualquer uma das seguintes funções

- Função densidade de probabilidade $f(x)$ - definida para todo o x em que a variável está definida.

- Função Acumulada ou de distribuição $F(x)$ - representa a probabilidade acumulada até x

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Calculo de probabilidades em variáveis continuas

$$\begin{aligned}
P(X \leq a) &= F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \\
P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx \\
P(X > a) &= 1 - F(a) \\
P(X = a) &= 0, \text{ para todo o valor de } a
\end{aligned}$$

1.1 Distribuição Uniforme

Se X é uma V. A. C. assumindo qualquer valor num intervalo (a, b) pertencente a $\mathbb{R}$, com a mesma probabilidade, diz-se que X tem distribuição uniforme.

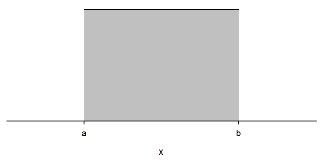
A função de densidade da distribuição uniforme é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } x \in (a, b) \\ 0 & \text{para } x \notin (a, b) \end{cases}$$

em que:

- a é o menor valor assumido por x;
- b é o maior valor assumido por x;

A representação gráfica de $f(x)$ é a seguinte:



A função de distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Área de um retângulo

$$\begin{aligned} A &= B.h \\ &= (b-a)\left(\frac{1}{b-a}\right) \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Outra forma de ver a área:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b dx \\ &= \frac{1}{b-a} x \Big]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}(b-a) = 1 \end{aligned}$$

Realmente é uma função de densidade, pois a $f(x) \geq 0$ e a área é igual a 1.

Exemplo. Se uma VAC assume qualquer valor no intervalo $(-2, 3)$ com a mesma probabilidade, a distribuição uniforme tem a seguinte função de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-(-2)} = \frac{1}{5} & \text{para } x \in (-2, 3) \\ 0 & \text{para } x \notin (-2, 3) \end{cases}$$

Qual a probabilidade de x estar entre 0 e 2?

$$\begin{aligned}
P(0 \leq x \leq 2) &= b.h = 2.\frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 \\
P(0 \leq x \leq 2) &= F(2) - F(0) \\
F(2) &= \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5} \\
F(0) &= \frac{0+2}{5} = \frac{2}{5} \\
P(0 \leq x \leq 2) &= \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = 0,4
\end{aligned}$$

1.1.1 Parâmetros Característicos da Distribuição Uniforme

1. Média $\mu = \dfrac{a+b}{2}$

   No exemplo $\mu = \dfrac{-2+3}{2} = 0,5$

2. Variância $\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

   No exemplo $\sigma^2 = \dfrac{(3-(-2))^2}{12} = \dfrac{25}{12} = 2,08$

3. Desvio Padrão $\sigma = \dfrac{b-a}{\sqrt{12}}$

   No exemplo $\sigma = \dfrac{3-(-2)}{\sqrt{12}} = \dfrac{5}{\sqrt{12}} = 1,44$

1.2 Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial está ligada à de Poisson; ela analisa inversamente o experimento: um intervalo ou espaço para ocorrência de um evento.

Exemplos:

1. O tempo para carregar um caminhão considerando que em média gasta-se 15 minutos para realizar esta tarefa;

2. O tempo de espera em restaurantes, caixas de banco;

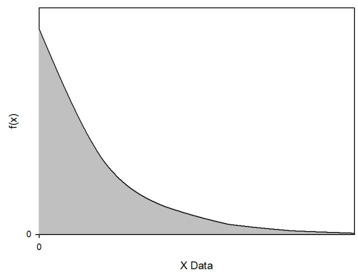
3. O tempo de vida de aparelhos eletrônicos.

A função de densidade da distribuição exponencial é dada por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

em que:

- λ taxa de falha no intervalo de tempo.



A representação gráfica de $f(x)$ é a seguinte:

A função de distribuição é dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Exemplo: Suponha que uma máquina falhe em média uma vez a cada dois anos. Calcule a probabilidade da máquina falhar durante o próximo ano. Tempos $\lambda = \frac{1}{2} = 0,5$, e X tempo para falhar, temos $P(X \leq 1)$

$$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-0,5} = 0,3935$$

1.2.1 Parâmetros Característicos da Distribuição Exponencial

1. Média $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$

2. Variância $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

1.3 Distribuição Normal

A distribuição Normal corresponde a mais importante distribuição de variáveis aleatórias contínuas, em razão da sua enorme aplicação nos mais variados campos do conhecimento. Sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

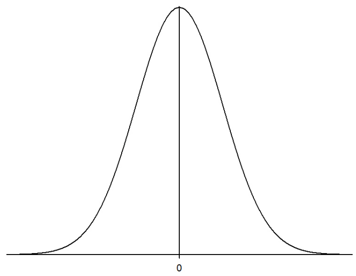
em que os parâmetros e σ^2 são respectivamente a média e a variância da distribuição.

A distribuição normal apresenta a seguinte propriedades:

1. É simétrica em relação a μ;

2. O ponto máximo de f(x) ocorre em $x = \mu$. Neste ponto as três medidas de posição (média, moda e mediana) se confundem;

3. A área compreendida abaixo da curva normal e a acima do eixo x vale 1 ou 100%;



A distribuição Normal com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$ é conhecida como distribuição Normal reduzida ou padronizada. Uma variável aleatória com essa distribuição geralmente é simbolizada pela letra Z.

O cálculo de probabilidades de uma distribuição Normal é feito pela integral definida no intervalo da variável objeto de estudo:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

Devido a dificuldade de resolução dessa integral, procurou-se métodos alternativos para obtenção das probabilidades. Uma das formas mais utilizadas é por meio de tabela de probabilidades de uma distribuição Normal padrão (Z).

Uma propriedade interessante de uma variável aleatória X que segue qualquer distribuição Normal é a de que ela pode ser transformada em uma variável normal padrão Z, por meio da expressão

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

As áreas referentes à variável Z são geralmente tabeladas do tipo

$$P(0 < Z < z)$$

Exemplo: A produção diária de uma fabricante de tintas é uma variável aleatória X com distribuição normal com média $\mu = 10000$galões e variância $\sigma^2 = 1000000$galões^2. A direção dessa fabrica quer criar um bônus de incentivo aos funcionários, que será pago se a produção média diária exceder 11000galões. Qual a probabilidade da empresa pagar o bônus? Quero saber $P(X > 11000)$, primeiro vamos padronizar esta variável, sendo $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1000000} = 1000$

Primeiro vamos padronizar esta variável

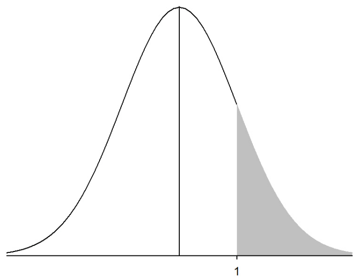
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{11000-10000}{1000} = 1,0$$

Assim,

$$P(X > 11000) = (Z > 1,0)$$

Como a tabela me fornece apenas o valor de que está entre 0 e z, então temos

$$P(X > 11000) = P(Z > 1,0) = 0,5 - P(0 < Z < 1,0) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$$



Assim a probabilidade da empresa pagar o bonus é de 0,1587.

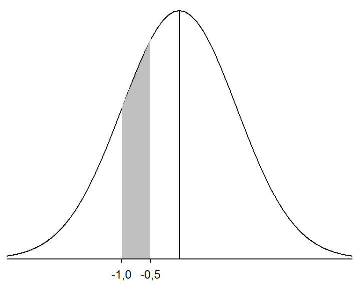
Um membro da direção da fábrica diz que se a empresa tiver produção média diária entre 9000 e 9500 galões em um mês anterior, não tem como pagar o bônus mesmo que o funcionários tenha excedido os 11000galões. Nesse caso qQual a probabilidade não pagar o bônus.

Quero saber $P(9000 < x < 9500)$, primeiro vamos padronizar esta variável

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{9000 - 10000}{1000} = -1 \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{9500 - 10000}{1000} = -0,5$$

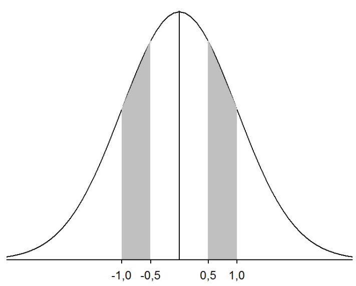
Então

$$P(9000 < x < 9500) = P(-1 < z < -0,5)$$



Como na tabela tem apenas valores postivos e a distribuição normal é simétrica temos que

$$P(-1 < z < -0,5) = P(0,5 < z < 1,0)$$



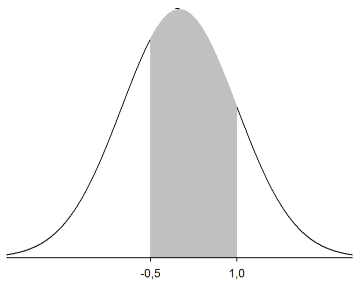
Utilizando a tabela temos que

$$P(0,5 < z < 1,0) = P(0 < z < 1,0) - P(0 < z < 0,5) = 0,3413 - 0,1915 = 0,1498$$

Assim, a probabilidade de $P(9000 < x < 9500) = 0,1498$

Qual a probabilidade da empresa produzir entre 9500 e 11000 galões por dia. Utilizando as padronizações já realizadas temos que

$$P(9000 < x < 11000) = P(-0,5 < z < 1,0)$$



Assim,

$$P(-0,5 < z < 1,0) = P(0 < z < 1,0) + P(0 < z < 0,5) = 0,3413 + 0,1915 = 0,5328$$

1.3.1 Aproximação Normal das Distribuições Binomial e de Poisson

A distribuição normal pode ser utilizada como uma aproximação das distribuições Binomial e de Poisson. Esta aproximação se torna cada vez melhor quando o tamanho da amostra n cresce.

Recomenda-se usar a aproximação normal, quando:

- Distribuição Binomial - se np e $nq \geq 5$
- Distribuição Poisson - se $np \geq 5$

No uso da aproximação normal deve-se lembrar que as distribuições Binomial e de Poisson são de variáveis aleatórias discretas (só existe probabilidade para valores inteiros). Nestes casos recomenda-se utilizar a correção de continuidade $x - 0,5$ e $x + 0,5$.

Exemplo: Sabe-se que o poder germinativo das sementes de uma certa variedade de milho é de 30%. Semeando 30 destas sementes, qual a probabilidade de germinar mais de cinco semente.

Temos $n = 30$ e $p = 0,30$ e $q = 0,7$

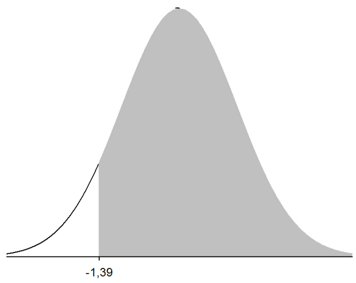
A média $\mu = np = 30 \times 0,30 = 9$ e a variância $\sigma^2 = npq = 100 \times 0,30 \times 0,70 = 6,3$

Queremos $P(X > 5)$, utilizando a correção de continuidade $P(X > 5,5)$. Vamos padronizar

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{5,5 - 9}{\sqrt{6,3}} = -1,39$$

Assim,

$$P(X > 5,5) = P(Z > -1,39) = 0,5 + P(0 < Z < 1,39) = 0,5 + 0,4177 = 0,9177$$



Exemplo: Numa lâmina verificou-se que existiam em média 27,6 bactérias/cm2. Qual a probabilidade de se encontrar mais de 35 bactérias por centímetro quadrado?

Temos $\lambda = 27,6$

Queremos $P(X > 35)$, utilizando a correção de continuidade $P(X > 35,5)$. Vamos padronizar

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{35,5 - 27,6}{\sqrt{27,6}} = 1,50$$

Assim,

$$P(X > 35,5) = P(Z > 1,50) = 0,5 - P(0 < Z < 1,50) = 0,5 - 0,4332 = 0,0668$$

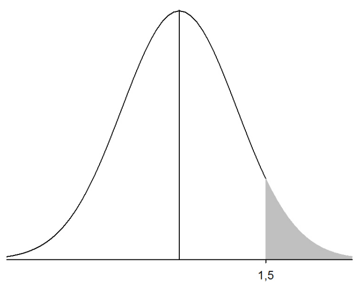


Tabela 1: Distribuição Normal - probabilidade do valor de z padronizado estar entre 0 e o valor tabulado nas margens

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000