

1 Distribuições Amostrais

Ao retirarmos uma amostra aleatória de uma população e calcularmos a partir desta amostra qualquer quantidade, encontramos a estatística, ou seja, chamaremos os valores calculados em função dos elementos da amostra de estatísticas.

1.1 Distribuição Amostral da Média ($\bar{X}$)

Se considerarmos o processo de seleção de uma amostra aleatória simples como um experimento, a média da amostra $\bar{X}$ é a descrição numérica do resultado do experimento. Assim, a média da amostra $\bar{X}$ é uma variável aleatória. Como resultado, tal como outras variáveis aleatórias, $\bar{X}$ tem uma média ou um valor esperado, uma variância e uma distribuição de probabilidade. Como os valores possíveis de $\bar{X}$ são os resultados de diferentes amostras aleatórias simples, a distribuição da probabilidade de $\bar{X}$ é chamada de distribuição amostral. Pode-se assim dizer que a média aleatória $\bar{X}$ é o valor esperado de , isto é, $E(\bar{X}) = \mu$, em que μ é a média da população.

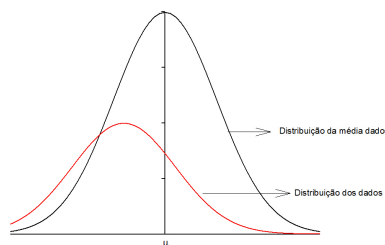
Seja $\sigma_{\bar{X}}^2$ a variância da distribuição de amostragem de $\bar{X}$; por propriedade da variância está sera $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

1.1.1 Teorema do Limite Central (TLC)

Ao selecionar amostras aleatórias simples de tamanho n a partir de uma população com parâmetros (μ, σ^2) a distribuição amostral da média das amostras $\bar{X}$ pode ser aproximada pela distribuição normal de probabilidade à medida que o tamanho de amostra se torna maior. Assim:

- Se a população tem distribuição normal, então a média amostral terá uma distribuição aproximadamente normal, independentemente da forma da distribuição de frequências da população de onde foi retirada a amostra;
- Se o tamanho n da amostra for suficientemente grande maior ou igual a 30 elementos), então a média de uma amostra aleatória retirada de uma população terá uma distribuição aproximadamente normal, independentemente da forma da distribuição de frequências da população de onde foi retirada a amostra.

Portanto, a distribuição da média amostral é aproximadamente normal e seus valores de média e desvios padrão estão relacionados com média $\mu_{\bar{X}} = \mu$ e variância $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$



Como a distribuição da média amostral é uma distribuição normal, podemos transforma-la em uma variável normal padrão Z , por meio da expressão

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Exemplo: Uma indústria elétrica fabrica lâmpadas que têm vida útil distribuída com média de 800 horas e variância igual $1600(\text{horas})^2$. Qual a probabilidade de uma amostra aleatória de tamanho $n = 64$ ter vida útil superior a $806,65 \text{ horas}$

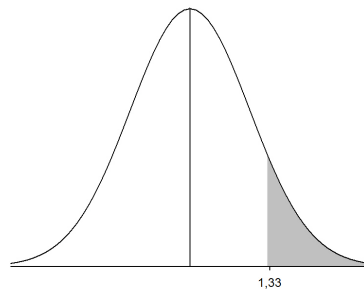
Temos que $\mu = 800$ e $\sigma^2 = 1600$ e $\sigma = 40$, então $\mu_{\bar{X}} = 800$ e $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1600}{64}$,

Queremos $P(\bar{X} > 806,65)$, primeiro vamos padronizar

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{806,65 - 800}{\frac{40}{\sqrt{64}}} = \frac{6,65}{\frac{40}{8}} = 1,33$$

Então:

$$P(\bar{X} > 806,65) = P(z > 1,33) = 0,5 - P(0 < z < 1,33) = 0,5 - 0,4082 = 0,0918$$



1.1.2 Distribuição t de student

A distribuição t de Student aparece naturalmente no problema de se determinar a média de uma população (que segue a distribuição normal) a partir de uma amostra. Neste problema, não se sabe qual é a média ou o desvio padrão da população, mas ela deve ser normal.

A variável aleatória T dada por:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

segue uma distribuição t de Student com $\nu = n - 1$ graus de liberdade, e a função de densidade é dada por

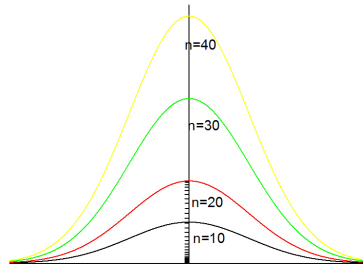
$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)},$$

Grau de liberdade pode ser entendido como número de termos independentes (dimensão da amostra) a serem avaliados na população.

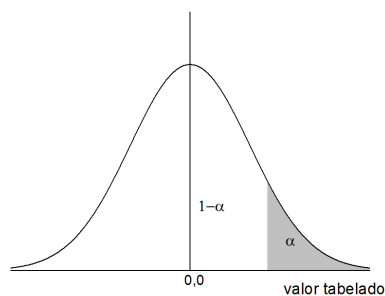
Algumas características da distribuição t de student:

- É simétrica em relação a zero;
- Todas curvas tem máximo em $t = 0$;

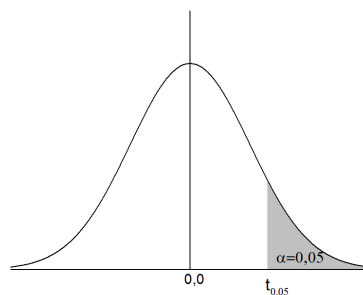
- Existe uma curva para cada tamanho de amostra (n) e o valor $\nu = n - 1$ (número de graus de liberdade) é usado para obtenção de valores na tabela;
- A medida que n cresce a distribuição t se aproxima da normal padrão z ;



Valores de probabilidade de t são obtidos em tabelas. A tabela de t informa o valor acima do qual se encontra a área α

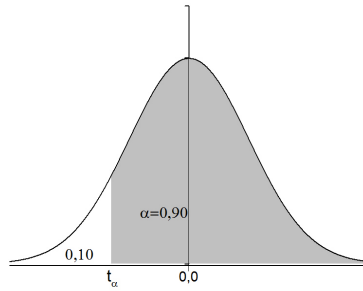


Exemplo: Seja uma amostra $n = 15$. Qual é o valor de t acima do qual tem-se 5% de probabilidade. $\alpha = 0,05$, $\nu = 15 - 1 = 14$, pela tabela temos que $t=1,761$



Exemplo: Qual é o valor de t acima do qual tem-se 90% de probabilidade $\alpha = 0,90$; $\nu = 15 - 1 = 14$, pela simetria da distribuição o valor que deixa 10% da área à sua esquerda com o sinal negativo.

$\alpha = 0,10$; $\nu = 15 - 1 = 14$, então $t = 1,345$, pela simetria $\alpha = 0,90$; $\nu = 15 - 1 = 14$, $t = -1,345$



1.2 Distribuição amostral para proporção

Considere que uma população a proporção de elementos que portadores de certa característica é p . Definindo uma variável aleatória, da seguinte maneira

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo for portador da característica} \\ 0 & \text{se o indivíduo não for portador da característica} \end{cases}$$

Logo $E(X) = p$ e $Var(X) = \sigma^2$.

Como os resultados individuais são 0 (fracasso) ou 1 (sucesso), temos que $Y = \sum_{i=1}^n x_i$ é o total de indivíduos de resultados em n ensaios, que correspondem aos sucessos (indivíduo for portador da característica), porque aos resultados que correspondem aos fracassos, estão associados o valor zero.

Assim, Y tem distribuição binomial com parâmetros n (tamanho da amostra) e p (proporção de indivíduos portadores da característica), em que:

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

ou seja, $\hat{p}$ é igual à média da variável aleatória X

Como Y tem distribuição binomial $b(n, p)$, com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} E[\hat{p}] &= E\left[\frac{Y}{n}\right] = \frac{1}{n}E[Y] = \frac{1}{n}np = p \\ Var[\hat{p}] &= E\left[\frac{Y}{n}\right] = \frac{1}{n^2}E[Y] = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n} \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema Limite Central, quando n é grande ($n > 30$), a proporção amostral $\hat{p}$ de sucessos em n ensaios de Bernoulli tem distribuição aproximadamente normal com média $\mu = p$ e variância $\sigma^2 = \frac{pq}{n}$, e assim podemos utilizar a padronização:

$$z = \frac{\hat{p} - \mu}{\sigma} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

exemplo:

1.3 Distribuição Amostral da Variância

1.3.1 Distribuição Qui-Quadrado

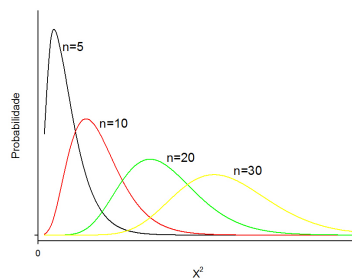
Há casos em que se está mais interessado na variância do que na média da amostra. Por exemplo, em filas de espera. Mesmo conhecendo-se o tempo médio de espera, a informação do grau de variabilidade deste tempo é importante. A distribuição usada neste caso é conhecida como Distribuição Qui-Quadrado, definida como:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

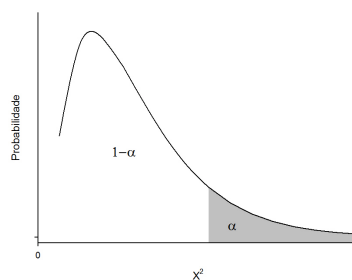
e a função de densidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} I_{\{x \geq 0\}},$$

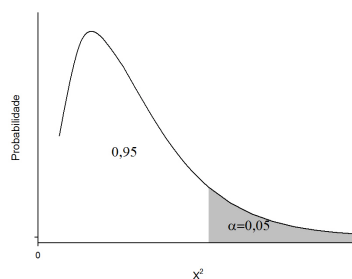
Da mesma forma que a distribuição t, existe uma curva para distribuição Qui-quadrado para cada tamanho de amostra (n) e o valor $\nu = n - 1$ (número de graus de liberdade) é usado para obtenção de valores na tabela.



A tabela de χ^2 fornece o valor acima do qual encontra-se a área α



Exemplo: Uma amostra com $n = 15$. Qual o valor que deixa à sua direita 5% da área? $\alpha = 0,05, \nu =$



$15 - 1 = 14$, pela tabela temos que $t=1,761$

1.3.2 Distribuição F

A distribuição F está entre aquelas distribuições de probabilidade mais importantes na estatística, tem maior destaque na área de experimentação agrícola. Essa distribuição é definida pela variável resultante da razão das variâncias:

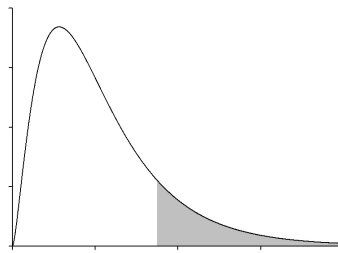
$$F = \frac{S_1^2 \sigma_1^2}{S_2^2 \sigma_2^2}$$

e a função de densidade é dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2} - 1}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right) \left(1 + \frac{\nu_1 x}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}}$$

Para se obter valores tabelados da distribuição F, é necessário observar dois graus de liberdade $\nu_1 = n_1 - 1$ e $\nu_2 = n_2 - 1$, o primeiro associado à variância amostral do numerador, e o segundo associado à variância amostral do denominador.

A tabela de F informa o valor acima do qual se encontra a área α e existe uma tabela para cada valor α e diferentes combinações de ν_1 e ν_2 .



Exemplo: Para duas amostras de F

Tabela 1: Distribuição t de student - valores para $P(t > t_c) = \alpha$, considerando $\alpha = 0,250; 0,200; 0,150; 0,100; 0,050; 0,025; 0,010; 0,005; 0,001$.

GL	α								
$\nu = n - 1$	0,250	0,200	0,150	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
50	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
80	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
100	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
240	0,676	0,843	1,039	1,285	1,651	1,970	2,342	2,596	3,125
480	0,675	0,842	1,038	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107
700	0,675	0,842	1,037	1,283	1,647	1,963	2,332	2,583	3,102
1000	0,675	0,842	1,037	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098

Tabela 2: Disituição Qui-quadrado - Valores de χ^2 para $P(\chi^2 > \chi_c^2)$ com $\alpha =$ 0,995; 0,9900,975; 0,950; 0,900; 0,750; 0,500; 0,250; 0,100; 0,050; 0,025; 0,010; 0,005.

n	α												
	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	3,93E-05	1,57E-04	0,001	0,004	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,037	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	17,240	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	23,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	61,698	69,334	77,577	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	71,145	79,334	88,130	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	80,625	89,334	98,650	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	90,133	99,334	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,170

Tabela 3: Limites unilaterais de F ao nível de 10% de probabilidade com os graus de liberdade ν_1 e ν_2

ν_2	ν_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	39,863	49,500	53,593	55,833	57,240	58,204	58,906	59,439	59,858	60,195	60,473
2	8,526	9,000	9,162	9,243	9,293	9,326	9,349	9,367	9,381	9,392	9,401
3	5,538	5,462	5,391	5,343	5,309	5,285	5,266	5,252	5,240	5,230	5,222
4	4,545	4,325	4,191	4,107	4,051	4,010	3,979	3,955	3,936	3,920	3,907
5	4,060	3,780	3,619	3,520	3,453	3,405	3,368	3,339	3,316	3,297	3,282
6	3,776	3,463	3,289	3,181	3,108	3,055	3,014	2,983	2,958	2,937	2,920
7	3,589	3,257	3,074	2,961	2,883	2,827	2,785	2,752	2,725	2,703	2,684
8	3,458	3,113	2,924	2,806	2,726	2,668	2,624	2,589	2,561	2,538	2,519
9	3,360	3,006	2,813	2,693	2,611	2,551	2,505	2,469	2,440	2,416	2,396
10	3,285	2,924	2,728	2,605	2,522	2,461	2,414	2,377	2,347	2,323	2,302
11	3,225	2,860	2,660	2,536	2,451	2,389	2,342	2,304	2,274	2,248	2,227
12	3,177	2,807	2,606	2,480	2,394	2,331	2,283	2,245	2,214	2,188	2,166
13	3,136	2,763	2,560	2,434	2,347	2,283	2,234	2,195	2,164	2,138	2,116
14	3,102	2,726	2,522	2,395	2,307	2,243	2,193	2,154	2,122	2,095	2,073
15	3,073	2,695	2,490	2,361	2,273	2,208	2,158	2,119	2,086	2,059	2,037
20	2,975	2,589	2,380	2,249	2,158	2,091	2,040	1,999	1,965	1,937	1,913
30	2,881	2,489	2,276	2,142	2,049	1,980	1,927	1,884	1,849	1,819	1,794
40	2,835	2,440	2,226	2,091	1,997	1,927	1,873	1,829	1,793	1,763	1,737
50	2,809	2,412	2,197	2,061	1,966	1,895	1,840	1,796	1,760	1,729	1,703
60	2,791	2,393	2,177	2,041	1,946	1,875	1,819	1,775	1,738	1,707	1,680
120	2,748	2,347	2,130	1,992	1,896	1,824	1,767	1,722	1,684	1,652	1,625
240	2,727	2,325	2,107	1,968	1,871	1,799	1,742	1,696	1,658	1,625	1,598

ν_2	ν_1										
	12	13	14	15	20	30	40	50	60	120	240
1	60,705	60,903	61,073	61,220	61,740	62,265	62,529	62,688	62,794	63,061	63,194
2	9,408	9,415	9,420	9,425	9,441	9,458	9,466	9,471	9,475	9,483	9,487
3	5,216	5,210	5,205	5,200	5,184	5,168	5,160	5,155	5,151	5,143	5,138
4	3,896	3,886	3,878	3,870	3,844	3,817	3,804	3,795	3,790	3,775	3,768
5	3,268	3,257	3,247	3,238	3,207	3,174	3,157	3,147	3,140	3,123	3,114
6	2,905	2,892	2,881	2,871	2,836	2,800	2,781	2,770	2,762	2,742	2,732
7	2,668	2,654	2,643	2,632	2,595	2,555	2,535	2,523	2,514	2,493	2,482
8	2,502	2,488	2,475	2,464	2,425	2,383	2,361	2,348	2,339	2,316	2,304
9	2,379	2,364	2,351	2,340	2,298	2,255	2,232	2,218	2,208	2,184	2,172
10	2,284	2,269	2,255	2,244	2,201	2,155	2,132	2,117	2,107	2,082	2,069
11	2,209	2,193	2,179	2,167	2,123	2,076	2,052	2,036	2,026	2,000	1,986
12	2,147	2,131	2,117	2,105	2,060	2,011	1,986	1,970	1,960	1,932	1,918
13	2,097	2,080	2,066	2,053	2,007	1,958	1,931	1,915	1,904	1,876	1,861
14	2,054	2,037	2,022	2,010	1,962	1,912	1,885	1,869	1,857	1,828	1,813
15	2,017	2,000	1,985	1,972	1,924	1,873	1,845	1,828	1,817	1,787	1,771
20	1,892	1,875	1,859	1,845	1,794	1,738	1,708	1,690	1,677	1,643	1,626
30	1,773	1,754	1,737	1,722	1,667	1,606	1,573	1,552	1,538	1,499	1,478
40	1,715	1,695	1,678	1,662	1,605	1,541	1,506	1,483	1,467	1,425	1,402
50	1,680	1,660	1,643	1,627	1,568	1,502	1,465	1,441	1,424	1,379	1,354
60	1,657	1,637	1,619	1,603	1,543	1,476	1,437	1,413	1,395	1,348	1,321
120	1,601	1,580	1,562	1,545	1,482	1,409	1,368	1,340	1,320	1,265	1,232
240	1,573	1,552	1,533	1,516	1,451	1,376	1,332	1,302	1,281	1,219	1,180

Tabela 4: Limites unilaterais de F ao nível de 5% de probabilidade com os graus de liberdade ν_1 e ν_2

ν_2	ν_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161,448	199,500	215,707	224,583	230,162	233,986	236,768	238,883	240,543	241,882	242,983
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385	19,396	19,405
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,786	8,763
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,936
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735	4,704
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060	4,027
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,603
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,687	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347	3,313
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,102
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978	2,943
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,818
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753	2,717
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714	2,671	2,635
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602	2,565
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,588	2,544	2,507
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348	2,310
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165	2,126
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,124	2,077	2,038
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,199	2,130	2,073	2,026	1,986
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040	1,993	1,952
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,959	1,910	1,869
240	3,880	3,033	2,642	2,409	2,252	2,136	2,048	1,977	1,919	1,870	1,829

ν_2	ν_1										
	12	13	14	15	20	30	40	50	60	120	240
1	243,906	244,690	245,364	245,950	248,013	250,095	251,143	251,774	252,196	253,253	253,783
2	19,413	19,419	19,424	19,429	19,446	19,462	19,471	19,476	19,479	19,487	19,492
3	8,745	8,729	8,715	8,703	8,660	8,617	8,594	8,581	8,572	8,549	8,538
4	5,912	5,891	5,873	5,858	5,803	5,746	5,717	5,699	5,688	5,658	5,643
5	4,678	4,655	4,636	4,619	4,558	4,496	4,464	4,444	4,431	4,398	4,382
6	4,000	3,976	3,956	3,938	3,874	3,808	3,774	3,754	3,740	3,705	3,687
7	3,575	3,550	3,529	3,511	3,445	3,376	3,340	3,319	3,304	3,267	3,249
8	3,284	3,259	3,237	3,218	3,150	3,079	3,043	3,020	3,005	2,967	2,947
9	3,073	3,048	3,025	3,006	2,936	2,864	2,826	2,803	2,787	2,748	2,727
10	2,913	2,887	2,865	2,845	2,774	2,700	2,661	2,637	2,621	2,580	2,559
11	2,788	2,761	2,739	2,719	2,646	2,570	2,531	2,507	2,490	2,448	2,426
12	2,687	2,660	2,637	2,617	2,544	2,466	2,426	2,401	2,384	2,341	2,319
13	2,604	2,577	2,554	2,533	2,459	2,380	2,339	2,314	2,297	2,252	2,230
14	2,534	2,507	2,484	2,463	2,388	2,308	2,266	2,241	2,223	2,178	2,155
15	2,475	2,448	2,424	2,403	2,328	2,247	2,204	2,178	2,160	2,114	2,090
20	2,278	2,250	2,225	2,203	2,124	2,039	1,994	1,966	1,946	1,896	1,870
30	2,092	2,063	2,037	2,015	1,932	1,841	1,792	1,761	1,740	1,683	1,654
40	2,003	1,974	1,948	1,924	1,839	1,744	1,693	1,660	1,637	1,577	1,544
50	1,952	1,921	1,895	1,871	1,784	1,687	1,634	1,599	1,576	1,511	1,476
60	1,917	1,887	1,860	1,836	1,748	1,649	1,594	1,559	1,534	1,467	1,430
120	1,834	1,803	1,775	1,750	1,659	1,554	1,495	1,457	1,429	1,352	1,307
240	1,793	1,761	1,733	1,708	1,614	1,507	1,445	1,404	1,375	1,290	1,237

Tabela 5: Limites unilaterais de F ao nível de 2,5% de probabilidade com os graus de liberdade ν_1 e ν_2

ν_2	ν_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	647,789	799,500	864,163	899,583	921,848	937,111	948,217	956,656	963,285	968,627	973,025
2	38,506	39,000	39,165	39,248	39,298	39,331	39,355	39,373	39,387	39,398	39,407
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473	14,419	14,374
4	12,218	10,649	9,979	9,605	9,364	9,197	9,074	8,980	8,905	8,844	8,794
5	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681	6,619	6,568
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,695	5,600	5,523	5,461	5,410
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823	4,761	4,709
8	7,571	6,059	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357	4,295	4,243
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026	3,964	3,912
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779	3,717	3,665
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588	3,526	3,474
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436	3,374	3,321
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312	3,250	3,197
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209	3,147	3,095
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123	3,060	3,008
20	5,871	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837	2,774	2,721
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,026	2,867	2,746	2,651	2,575	2,511	2,458
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452	2,388	2,334
50	5,340	3,975	3,390	3,054	2,833	2,674	2,553	2,458	2,381	2,317	2,263
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334	2,270	2,216
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222	2,157	2,102
240	5,088	3,746	3,171	2,839	2,620	2,461	2,341	2,245	2,167	2,102	2,047

ν_2	ν_1										
	12	13	14	15	20	30	40	50	60	120	240
1	976,708	979,837	982,528	984,867	993,103	1001,414	1005,598	1008,117	1009,800	1014,020	1016,137
2	39,415	39,421	39,427	39,431	39,448	39,465	39,473	39,478	39,481	39,490	39,494
3	14,337	14,304	14,277	14,253	14,167	14,081	14,037	14,010	13,992	13,947	13,925
4	8,751	8,715	8,684	8,657	8,560	8,461	8,411	8,381	8,360	8,309	8,283
5	6,525	6,488	6,456	6,428	6,329	6,227	6,175	6,144	6,123	6,069	6,042
6	5,366	5,329	5,297	5,269	5,168	5,065	5,012	4,980	4,959	4,904	4,877
7	4,666	4,628	4,596	4,568	4,467	4,362	4,309	4,276	4,254	4,199	4,171
8	4,200	4,162	4,130	4,101	3,999	3,894	3,840	3,807	3,784	3,728	3,699
9	3,868	3,831	3,798	3,769	3,667	3,560	3,505	3,472	3,449	3,392	3,363
10	3,621	3,583	3,550	3,522	3,419	3,311	3,255	3,221	3,198	3,140	3,110
11	3,430	3,392	3,359	3,330	3,226	3,118	3,061	3,027	3,004	2,944	2,914
12	3,277	3,239	3,206	3,177	3,073	2,963	2,906	2,871	2,848	2,787	2,756
13	3,153	3,115	3,082	3,053	2,948	2,837	2,780	2,744	2,720	2,659	2,628
14	3,050	3,012	2,979	2,949	2,844	2,732	2,674	2,638	2,614	2,552	2,520
15	2,963	2,925	2,891	2,862	2,756	2,644	2,585	2,549	2,524	2,461	2,429
20	2,676	2,637	2,603	2,573	2,464	2,349	2,287	2,249	2,223	2,156	2,121
30	2,412	2,372	2,338	2,307	2,195	2,074	2,009	1,968	1,940	1,866	1,827
40	2,288	2,248	2,213	2,182	2,068	1,943	1,875	1,832	1,803	1,724	1,682
50	2,216	2,176	2,140	2,109	1,993	1,866	1,796	1,752	1,721	1,639	1,594
60	2,169	2,129	2,093	2,061	1,944	1,815	1,744	1,699	1,667	1,581	1,534
120	2,055	2,014	1,977	1,945	1,825	1,690	1,614	1,565	1,530	1,433	1,376
240	1,999	1,958	1,921	1,888	1,766	1,628	1,549	1,497	1,460	1,354	1,289