1 Teoria da Decisão Estatística

1.1 Teste de Hipótese

É uma metodologia estatística que permite tomar decisão sobre uma ou mais populações baseando no conhecimento de informações da amostra.

Ao tentarmos a fixação de decisões, é conveniente a formulação de suposições ou de conjeturas acerca das populações de interesse, que, em geral, consistem em considerações sobre parâmetros das mesmas. Essas suposições, que podem ser ou não verdadeiras, são denominadas de Hipóteses Estatísticas, que podem ser:

- HIPÓTESE NULA - É aquela Hipótese Estatística, prefixada, formulada sobre o parâmetro populacional estudado, e é sempre uma afirmativa. É representada por H_0.
- HIPÓTESE ALTERNATIVA - São quaisquer hipóteses que difiram da Hipótese Nula. Pode ser representada por H_1 ou H_a

Os processos que habilitam a decidir se aceitam ou rejeitam as hipóteses formuladas, ou determinar se a amostra observada difere, de modo significativo, dos resultados esperados, são denominados de Testes de Hipóteses ou Testes de Significância.

Tabela 1: Erros possíveis de se cometer no processo de tomada de decisão

Decisões possíveis	Estados possíveis	
	Ho verdadeira	Ho falsa
Aceitação de Ho	Decisão correta	Erro do tipo II
Rejeição de Ho	Erro do tipo I	Decisão correta

Ao testar uma hipótese estabelecida, a probabilidade máxima com a qual se sujeitaria a correr o risco de um erro do tipo I é denominada de Nível de Significância do Teste e é representada por α.

Estudaremos testes de hipóteses com uma hipótese nula (H_0) e uma hipótese alternativa (H_a). A partir da formulação de (H_0) e (H_a), podemos definir se teste de hipótese é unilateral ou bilateral.

Consideremos θ o parâmetro estudado e θ_0 valor inicialmente suposto para. Podemos formular as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta \neq \theta_0 \end{cases} \quad \text{Teste Bilateral}$$

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{cases} \quad \text{Teste Unilateral}$$

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{cases} \quad \text{Teste Unilateral}$$

1.2 Teste para médias, variância conhecida

Suponha que X é uma variável aleatória com média μ desconhecida e variância σ^2conhecida. E queremos testar a hipótese de que a média é igual a um certo valor especificado μ_0. O teste de hipótese pode ser formulado como segue:

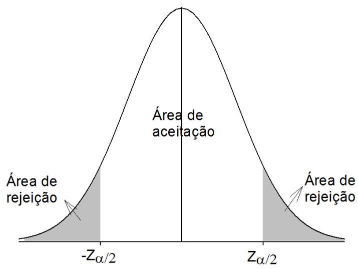
$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Para testar a hipótese, toma-se uma amostra aleatória de n observações e se calcula a estatística

$$z_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Como se trata de um teste bilateral temos duas alternativas para verificar se a hipótese H_0 é rejeitada

- se $|z_c| > z_{\frac{\alpha}{2}}$.
- se $2P\left[|z_c\, z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \leq \alpha$

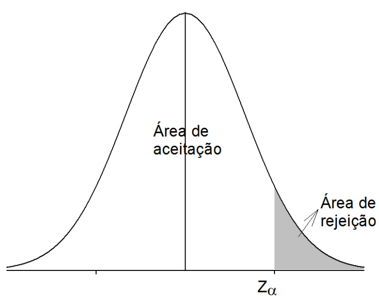


Se a hipótese formulada fosse

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Como se trata de testes unilaterais temos duas alternativas para verificar se a hipótese H_0 é rejeitada

- se $|z_c| > z_\alpha$.
- se $P\left[|z_c| > z_\alpha\right] \leq \alpha$



Exemplo: Uma industria elétrica fabrica lâmpadas afirma que o tempo de vida médio é de $800 horas$. Tomaram-se o tempo de vida de 40 lâmpadas e obteve-se uma média $\overline{X} = 750$ e sabe-se que a variância populacional é $\sigma^2 = 1600cm^2$. Pode-se afirmar que a indústria estava correta.

Utilizando um teste unilateral

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 800 \\ H_1: & \mu < 800 \end{cases}$$

Calculando o valor de z_c

$$z_c = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{750 - 800}{\frac{40}{\sqrt{40}}} = -7,90$$

Como não foi especificado o nível de significância, vamos assumir $\alpha = 0,05$. Nesse caso, trata-se de um teste unilateral, temos que observar o valor tabelado para $z_\alpha = z_{0,05} = 1,65$.

Conclusão: Observando $|z_c| = 7,90$, temos que como $7,90 > 1,65$, rejeita-se H_0, a um nível de significância de 5%, ou seja, com 95% de probabilidade a empresa estava errada ao afirmar que o tempo de vida médio é de $800 horas$.

1.3 Teste para médias, variância desconhecida

Suponha que X é uma variável aleatória Normal com média μ desconhecida e variância σ^2 desconhecida. E queremos testar a hipótese de que a média é igual a um certo valor especificado μ_0. O teste de hipótese pode ser formulado como segue:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Para testar a hipótese, toma-se uma amostra aleatória de $n \leq 30$ observações com variância desconhecida se calcula a estatística

$$t_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Rejeita-se H_0

- teste bilateral:
  - se $|t_c| > t_{\frac{\alpha}{2}}$.
  - se $2P\left[|t_c| > t_{\frac{\alpha}{2}}\right] \leq \alpha$
- teste unilateral:
  - se $|t_c| > t_\alpha$.
  - se $P\left[|t_c| > t_\alpha\right] \leq \alpha$

Para testar a hipótese, toma-se uma amostra aleatória de $n > 30$ observações com variância desconhecida se calcula a estatística

$$z_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Rejeita-se H_0

- teste bilateral:
  - se $|z_c| > z_{\frac{\alpha}{2}}$.
  - se $2P\left[|z_c| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \leq \alpha$
- teste unilateral:
  - se $|z_c| > z_{\alpha}$.
  - se $P\left[|z_c| > z_{\alpha}\right] \leq \alpha$

Exemplo: Em uma determinada industria um determinado rolamento esféricos é dito de qualidade se o seu diâmetro médio for igual a 240cm. Para verificar se os diâmetros médios estão atendendo as especificações, foi tomado uma amostra ao acaso de 20 peças, fornecendo um diâmetro médio de 236cm com desvio padrão de 15cm.

Utilizando um teste bilateral

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 240 \\ H_1: & \mu \neq 240 \end{cases}$$

Calculando o valor de t_c

$$t_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{236 - 240}{\frac{15}{\sqrt{20}}} = -1,193$$

Como não foi especificado o nível de significância, vamos assumir $\alpha = 0,05$. Nesse caso, trata-se de um teste unilateral, temos que observar o valor tabelado para $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0,05}{2}} = t_{0,025} = 2,093$.

Conclusão: Observando $|t_c| = 1,193$, temos que como $1,193 < 2,093$ não existe razão para rejeitar H_0, logo os diâmetros médios estão atendendo as especificações.

Exemplo: Uma amostra de 76 peixes pescados numa certa represa produziu um peso médio de 13,36g e desvio-padrão 4,79g. Suspeita-se que a média de peso da população desses peixes nessa região seja 12g. Teste essa hipótese com um nível de significância de 5%.

Utilizando um teste unilateral.

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 12,0 \\ H_1: & \mu > 12,0 \end{cases}$$

Calculando o valor de z_c

$$z_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{13,36 - 12,0}{\frac{4,79}{\sqrt{76}}} = 2,475$$

Nesse caso, trata-se de um teste bilateral, temos que observar o valor tabelado para $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,960$.

Conclusão: Observando $|z_c| = 2,475$, temos que como $2,475 > 1,65$ rejeita-se H_0 ao nível de 5% de significância. Portanto, a média de peso da população desses peixes é superior a 12g.

1.4 Teste de hipóteses para proporção

Assim como para a média, existem testes de hipóteses associados a proporções, estes testes são a respeito do parâmetro populacional p. Com os dados coletados de uma amostra de tamanho n, pode-se verificar o numero de sucessos X, e estimar a proporção $\hat{p}$.

Para testar as hipóteses sobre proporções pode-se utilizar a distribuição normal , nesse caso se calcula a estatística

$$z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Rejeita-se H_0

- teste bilateral se $|z_c| > z_{\frac{\alpha}{2}}$.
- teste unilateral se $|z_c| > z_{\alpha}$.

Para obter os valores de z tabelados, o mais prático é consultar a tabela de t, na última linha, quando os graus de liberdades são suficientemente grandes.

Exemplo: Um centro de pesquisas afirma que 30% das pessoas são usuários de internet sem fio em uma determinada região. Em uma amostra aleatória de 30 pessoas, em 12 dizem ter rede sem fio em casa. Teste a afimarção do centro de pesquisa utilizando a significância $\alpha = 0,05$.

Temos que $p_0 = 0,30 \Rightarrow q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,30 = 0,70$, número de sucessos $X = 12$, tamanho da amostra $n = 30$, assim temos:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{12}{30} = 0,40$$

Utilizando um teste bilateral

$$\begin{cases} H_0: & p = 0,30 \\ H_1: & p \neq 0,30 \end{cases}$$

Calculando o valor de z_c

$$z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0,40 - 0,30}{\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{30}}} = 1,20$$

Nesse caso, trata-se de um teste bilateral, temos que observar o valor tabelado para $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,960$.

Conclusão: Observando $|z_c| = 1,20$, temos que como $1,20 < 1,96 \Rightarrow |z_c| < z_{\frac{\alpha}{2}}$ não existe evidências para rejeitar H_0 ao nível de 5% de significância, logo a proporção de pessoas que utilizam a internet sem fio em de 30%.

1.5 Resumo das etapas aplicadas a qualquer teste de hipóteses

1. Determinar as hipóteses nula e alternativa.
2. Selecionar a estatística de teste que será usada para decidir rejeitar ou não a hipótese nula.

3. Especificar o nível de significância α para o teste.
4. Usar o nível de significância α para desenvolver regra de decisão que indica os valores críticos da estatística de teste que levará a rejeição de H_0.
5. Coletar os dados amostrais e calcular a estatística de teste.
6. Comparar o valor da estatística do teste com o(s) valor(es) crítico(s) especificado(s) na regra de decisão para determinar se H_0 deve ser rejeitado;