Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT

ESTATÍSTICA – Lista 1 – Teoria de Matrizes

1) Dadas as matrizes

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcular AA, AAA, BA, $(A + B)A^2$, (A - B)B, AC, BD

b) Verifique as propriedades da matriz transposta: (A')' = A, (AB)' = B'A', (A + B)'=A' + B', A'A e BB' são simétricas.

c) Verifique as propriedades da matriz inversa:

$(A^{-1})^{-1} = A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ e $(Ak)^{-1} = (1/k)A^{-1}$

2) Sendo $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Verifique a multiplicação de matrizes, em geral, não é comutativa.

3) Dadas as matrizes:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 10 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Verifique as propriedades do traço:

i) tr(C ± D) = tr(C) ± tr(D) ii) tr(C) = tr(C') iii) tr(CD) = tr(DC) iv) $tr(C^{-1}DC) = tr(D)$ v) $tr(CC') = \sum_{i,j}^{3,3} c_{ij}^2$

4) Apresente exemplos numéricos para cada um dos seguintes tipos de matriz:

i) Idempotente ii) Nilpotente iii) Unipotente iv) Tripotente (AAA = A)

5) Calcule os determinantes das matrizes seguintes:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

6) Dada as matrizes:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}100 & 99\\ 99 & 98\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0,99\\ 0,99 & 0,98\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}1,99\\ 1,97\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad b=\begin{pmatrix}1,989903\\ 1,970106\end{pmatrix}$$

i) Resolva os sistemas Cx = a e Cx = b, através do uso da matriz inversa $x = C^{-1}a$ e $x = C^{-1}b$.

ii) Calcule: a) $A^{-1}A$ b) $B^{-1}B$ c) $C^{-1}B$ e BC^{-1}

iii) Calcule os determinantes: det(A), det(B) e det(C)

7) Dada a matriz real $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

i) Mostre que as raízes do determinante $|A-xI| = 0$ são reais se, e somente se $\det(A) \leq [tr(A)]^2/4$.

ii) De exemplos numéricos para os casos em que A não é simétrica e que:

a) $\det(A) = 0$; b) $\det(A) = [tr(A)]^2/4$ e c) $\det(A) > [tr(A)]^2/4$.

8) Dado o vetor y e a matriz E, sendo:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Verifique que $y'y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

ii) Obtenha y'y

iii) Obtenha y'Ey

9) Prove que a soma e a diferença de duas matrizes triangulares superiores são uma matriz triangular superior.

10) Prove que a soma e a diferença de duas matrizes triangulares inferiores são uma matriz triangular inferior.

11) Prove que se A é uma matriz triangular inferior, então A' é triangular superior.

12) Prove que se A é uma matriz triangular superior, então A' é triangular inferior.

13) Prove que se uma matriz é ao mesmo tempo triangular superior e inferior, então ela é uma matriz diagonal.

14) Prove que, se $X'X = X$, então $X = X' = X^2$.

15) Prove que, se AB = A e BA = B, então A e B são idempotentes.

16) Prove que, se A tem uma linha de elementos nulos, então AB tem uma linha de elementos nulos.

17) Prove que o produto de duas matrizes diagonais é uma matriz diagonal.

18) Sejam A e B matrizes de ordem n idempotentes. A + B é idempotente? Prove ou de um contra exemplo.

19) Prove ou de um contra exemplo: $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

20) Determine a paridade das seguintes permutações em S_5:

a) $\sigma = 32154$ b) $\tau = 13524$ c) $\pi = 42531$

21) Para as permutações do exercício 20 encontre:

a) $\tau \circ \sigma$ b) $\pi \circ \sigma$ c) σ^{-1} d) τ^{-1}

22) Suponha que A e B são matrizes quadradas e que AB = 0. Se B é invertível, encontre A

23) Seja A uma matriz diagonal com elementos não nulos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}. Prove que A^{-1} é invertível e que A^{-1} é uma matriz diagonal com elementos $1/a_{11}$, $1/a_{22}$, ..., $1/a_{nn.}$

24) Prove $|A|^n = |A^n|$, para todo $n \geq 1$.

25) Seja A uma matriz ortogonal. Prove que $|A| = \pm 1$.

26) Prove que, se $A = A^{-1}$ então $|A| = \pm 1$.

27) Sejam A e B matrizes simétricas.

a) Prove que A' é simétrica.

b) Prove que A + B é simétrica.

c) Prove que A A' e A'A são simétricas.

d) Prove que A + A' é simétrica.

28) Um fabricante de móveis faz cadeiras e mesas, cada uma das quais passa por um processo de montagem e outro de acabamento. O tempo necessário para esses processos é dado (em horas) pela matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Cadeira} \\ \text{Mesa} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Montagem} & \text{Acabamento} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

O fabricante tem uma fábrica em São Paulo e outra no Rio de Janeiro. As taxas por hora para cada um dos processos são dadas (em reais) pela matriz

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{Montagem} \\ \text{Acabamento} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Sao Paulo} & \text{Rio de Janeiro} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 24 & 30 \\ 30 & 36 \end{pmatrix} \end{array}$$

Qual o significado dos elementos do produto matricial AB?